Scaled entropy and dynamics of metrics; recent achievements

Anatoly Vershik

Saint Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences,
St. Petersburg State University,
Institute for Information Transmission Problems

Polynomial Computer Algebra 2023,
Saint Petersburg,
April 19, 2023

CONTENT

CONTENT

1.Что такое метрическая тройка (X, μ, ρ) (mm-пространство)

CONTENT

1.Что такое метрическая тройка (X, μ, ρ) (mm-пространство)
2.Классификация метрических троек (X, μ, ρ). Теорема Громова-Вершика

CONTENT

1.Что такое метрическая тройка (X, μ, ρ) (mm-пространство)
2.Классификация метрических троек (X, μ, ρ). Теорема Громова-Вершика
3. Энтропия метрических пространств с мерой mm-энтропия и энтропия метрических троек Энтропия Шеннона-Колмогорова.
.

CONTENT

1.Что такое метрическая тройка (X, μ, ρ) (mm-пространство)
2.Классификация метрических троек (X, μ, ρ). Теорема Громова-Вершика
3. Энтропия метрических пространств с мерой mm-энтропия и энтропия метрических троек Энтропия Шеннона-Колмогорова.
.
4.Динамика метрик с эргодической точки зрения. Статсуммы метрик.

CONTENT

1.Что такое метрическая тройка (X, μ, ρ) (mm-пространство)
2.Классификация метрических троек (X, μ, ρ). Теорема Громова-Вершика
3. Энтропия метрических пространств с мерой mm-энтропия и энтропия метрических троек Энтропия Шеннона-Колмогорова.
.
4.Динамика метрик с эргодической точки зрения. Статсуммы метрик.
5.Определение масштабированной энтропии.

CONTENT

CONTENT

1.Что такое метрическая тройка (X, μ, ρ) (mm-пространство)
2.Классификация метрических троек (X, μ, ρ). Теорема Громова-Вершика
3. Энтропия метрических пространств с мерой mm-энтропия и энтропия метрических троек Энтропия Шеннона-Колмогорова.
.
4.Динамика метрик с эргодической точки зрения. Статсуммы метрик.
5.Определение масштабированной энтропии.
6. Каталитические инварианты.
7. Свойства матричных распределений. Связь со случайными матрицами.

Определение метрических троек (mm-пространств

Определение метрических троек (mm-пространств

Основное определение.

Определение метрических троек (*mm*-пространств

Основное определение.

$$(X, \mu, \rho)$$

— тройка (пространство, мера. метрика) — наывается метрической тройкой или *mm-пространством*, если

Определение метрических троек (mm-пространств

Основное определение.

$$(X, \mu, \rho)$$

— тройка (пространство, мера. метрика) — наывается метрической тройкой или *mm-пространством*, если
1) (X, ρ) -полное метрическое сепарабельное пространство ("польское"),

Определение метрических троек (*mm*-пространств

Основное определение.

$$(X, \mu, \rho)$$

— тройка (пространство, мера. метрика) — наывается метрической тройкой или *mm-пространством*, если

1) (X, ρ) -полное метрическое сепарабельное пространство ("польское"),

2) (X, μ) пространство Лебега с борелевской (по отношению к метрике) непрерывной вероятностной мерой.

Естественно считать меру невырожденной (непустые открытые множества имеют положительную меру).

Обобщение теоремы Лузина и ϵ—гомеоморфизм метрических троек

Обобщение теоремы Лузина и ϵ—гомеоморфизм метрических троек

Theorem

Для любого $\epsilon > 0$ *и любых двух троек* (X_1, μ_1, ρ_1) *и* $(X)_2, \mu_2, \rho_2)$ *существует множества* $A_1 \subset X_1, A_2 \subset X_2, \mu_1(A_1) = \mu_2(A_2) > 1 - \epsilon$ *и гомеоморфизм* $T : A_1 - -- > A_2$ *как топологических метризуемых пространств.*

(A la Lusin)

КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТРИЧЕСКИХ ТРОЕК И МАТРИЧНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТРИЧЕСКИХ ТРОЕК И МАТРИЧНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Классификация метрических троек (X, μ, ρ) с точностью до изометрий, сохраняющих меру.
Две тройки
$(X_1, \mu_1, \rho_1) \sim (X_2, \mu_2, \rho_2)$
изоморфны, если

КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТРИЧЕСКИХ ТРОЕК И МАТРИЧНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Классификация метрических троек (X, μ, ρ) с точностью до изометрий, сохраняющих меру.
Две тройки
$(X_1, \mu_1, \rho_1) \sim (X_2, \mu_2, \rho_2)$
изоморфны, если

$$\exists T : X_1 --- X_2 : \quad T_* \mu_1 = \mu_2; \quad \rho_2(Tx, Ty) = \rho_1(x, y), x, y \in X_1; \exists T^{-1}$$

Определение матричного распределения метрической тройки

(X, μ, ρ) (мера μ предполагается невырожденной)

Определение матричного распределения метрической тройки

(X, μ, ρ) (мера μ предполагается невырожденной)
Рассмотрим бесконечную последовательность независимых случайных точек $\xi_1, \xi_2, \dots$ распределенных на X по мере μ, и отображение
$F : X^\infty \to M_\infty(R+) :$

Определение матричного распределения метрической тройки

(X, μ, ρ) (мера μ предполагается невырожденной)
Рассмотрим бесконечную последовательность независимых случайных точек $\xi_1, \xi_2, \dots$ распределенных на X по мере μ, и отображение
$F : X^\infty \to M_\infty(R+)$:

$$F(\{\xi_1, \xi_2, \dots\}) = ||\rho(\xi_i, \xi_j)||_{\{i,j\}}$$

Определение матричного распределения метрической тройки

(X, μ, ρ) (мера μ предполагается невырожденной)
Рассмотрим бесконечную последовательность независимых случайных точек $\xi_1, \xi_2, \dots$ распределенных на X по мере μ, и отображение
$F : X^\infty \to M_\infty(R+)$:

$$F(\{\xi_1, \xi_2, \dots\}) = ||\rho(\xi_i, \xi_j)||_{\{i,j\}}$$

F-образ меры Бернулли μ^∞ при отображении на пространство $Mat_\infty(\mathbb{R}_+)$ называется *матричным распределением* метрической тройки $D_{(X,\mu,\rho)}$.

Теорема о полной системе инвариантов метрических троек (mm-пространтств)

Теорема о полной системе инвариантов метрических троек (mm-пространтств)

Theorem

(Громов-Вершик) Матричное распределение, как вероятностная мера на множестве бесконечных дистанционных матриц, есть полный инвариант изоморфизма метрической тройки).

Теорема о полной системе инвариантов метрических троек (mm-пространтств)

Theorem

(Громов-Вершик) Матричное распределение, как вероятностная мера на множестве бесконечных дистанционных матриц, есть полный инвариант изоморфизма метрической тройки).

Lemma

1.Матричное распределение любой метрической тройки с невырожденной непрерывной мерой есть инвариатная относительно бесконечной симметрической группв, эргодически действующей на матрицах одновременной подстановкой строк и столбцов;

Продолжение

Продолжение

Lemma

(Восстановление тройки по матричному распределению)

Продолжение

Lemma

(Восстановление тройки по матричному распределению)
Два доказательства.

Продолжение

Lemma

(Восстановление тройки по матричному распределению)
Два доказательства.
Дополнительные свойства матричных распределений:
a) простые меры;

Продолжение

Lemma

(Восстановление тройки по матричному распределению)
Два доказательства.
Дополнительные свойства матричных распределений:
а) простые меры;
б) существование пределов энтропий конечных миноров.

Продолжение

Lemma

(Восстановление тройки по матричному распределению)
Два доказательства.
Дополнительные свойства матричных распределений:
а) простые меры;
б) существование пределов энтропий конечных миноров.
3.Мера на $M_\infty(R_+)$, удовлетворяющая эквивалентным условиям а) и б), является матричным распределением некоторой метрической тройки.

Вычисление характеристик метрических троек по матричному распределению

.

Вычисление характеристик метрических троек по матричному распределению

.

Энтропия метрической тройки

Рассмотрим метрическую тройку (X, μ, ρ), μ-невырожденная мера.

Вычисление характеристик метрических троек по матричному распределению

.

Энтропия метрической тройки

Рассмотрим метрическую тройку (X, μ, ρ), μ-невырожденная мера.

$H_{(X,\mu,\rho)}(\epsilon) \sim h(\epsilon) \in \mathbb{N} - --$

Вычисление характеристик метрических троек по матричному распределению

.

Энтропия метрической тройки

Рассмотрим метрическую тройку (X, μ, ρ), μ-невырожденная мера.

$H_{(X,\mu,\rho)}(\epsilon) \sim h(\epsilon) \in \mathbb{N} - --$

Это — целочисленная функция H на $(0, 1)$, называемая mm-энтропией тройки:

$h : (0, 1) \to \mathbb{N}$,

Вычисление характеристик метрических троек по матричному распределению

.

Энтропия метрической тройки

Рассмотрим метрическую тройку (X, μ, ρ), μ-невырожденная мера.

$H_{(X,\mu,\rho)}(\epsilon) \sim h(\epsilon) \in \mathbb{N} - --$

Это — целочисленная функция H на $(0, 1)$, называемая *mm*-энтропией тройки:

$h : (0, 1) \to \mathbb{N}$,

$$H_{(X,\mu,\rho)}(\epsilon) = h(\epsilon) = \{\min k : \mu(\bigcup_{i=1}^{k} B_i) > 1 - \epsilon\},$$

где $B_1, B_2, ...B_k$ - шары радиуса не больше ϵ.

(Число шаров радиуса не больше ϵ, объединение которых имет меру не меньшую $1 - \epsilon$).

Вычисление характеристик метрических троек по матричному распределению

.

Энтропия метрической тройки

Рассмотрим метрическую тройку (X, μ, ρ), μ-невырожденная мера.

$H_{(X,\mu,\rho)}(\epsilon) \sim h(\epsilon) \in \mathbb{N} - --$

Это — целочисленная функция H на $(0,1)$, называемая *mm*-энтропией тройки:

$h : (0,1) \to \mathbb{N}$,

$$H_{(X,\mu,\rho)}(\epsilon) = h(\epsilon) = \{\min k : \mu(\bigcup_{i=1}^{k} B_i) > 1 - \epsilon\},$$

где $B_1, B_2, ...B_k$ - шары радиуса не больше ϵ.

(Число шаров радиуса не больше ϵ, объединение которых имет меру не меньшую $1-\epsilon$).

Это лемма из элементарной теории меры(!) История: Шеннон — Колмогоров —Энтропия —Автор.

МАСШТАБИРОВАННАЯ ЭНТРОПИЯ

МАСШТАБИРОВАННАЯ ЭНТРОПИЯ

Асимптотика функции H в окрестности $\epsilon = 0$ есть один из главных инвариантов mm-пространства (Шеннон-'948, АВ-2008).

МАСШТАБИРОВАННАЯ ЭНТРОПИЯ

Асимптотика функции H в окрестности $\epsilon = 0$ есть один из главных инвариантов mm-пространства (Шеннон-'948, АВ-2008).
Основное наблюдение: асимптотика не зависит от начальной метрики и следовательно, является инвапиантом динамики.

Динамика метрик. Основная идея: статсумма метрик

Динамика метрик. Основная идея: статсумма метрик

(X, μ, ρ) — метрическая тройка.

Динамика метрик. Основная идея: статсумма метрик

(X, μ, ρ) — метрическая тройка.
Пусть автоморфзизм (X, mu), сохраняющий меру. Рассмотрим сдвиги метрики ρ $\rho_T(x, y \equiv \rho_1)(x, y) = \rho)(Tx, Ty), \rho_n(x, y) = \rho(T^n x, T^n y), n = 1, 2, \dots$

Динамика метрик. Основная идея: статсумма метрик

(X, μ, ρ) — метрическая тройка.
Пусть автоморфзизм (X, mu), сохраняющий меру. Рассмотрим сдвиги метрики ρ $\rho_T(x, y \equiv \rho_1)(x, y) = \rho)(Tx, Ty), \rho_n(x, y) = \rho(T^n x, T^n y), n = 1, 2, \ldots$
Образуем статсумму метрик, зависящих от z

$$\Omega_T(\rho, z) \equiv \Omega_T(z) = (1 - z) \sum_{n=0}^{\infty} z^n \rho(T^n x, T^n y), \quad z \in [0, 1).$$

Задача состот в изучении асимптотических свойств метрики при $z \to 1$. В частности, какая информация, содержится в струе метрики $\Omega_T(\rho, z)$ в точке $z = 1$.

Определение масштабированной энтропии

Рассмотрим последовательность энтропий этих метрических пространств:

Определение масштабированной энтропии

Рассмотрим последовательность энтропий этих метрических пространств:

$$\Phi_\rho(\epsilon, z) = H(\epsilon, \mu, \Omega_T(\rho.z))$$

Определение масштабированной энтропии

Рассмотрим последовательность энтропий этих метрических пространств:

$$\Phi_\rho(\epsilon, z) = H(\epsilon, \mu, \Omega_T(\rho.z))$$

Масштабированная энтропия автоморфизма T, определяется как асимптотический класс функций от ϵ, z при стремлении $z \to 1$ (или, что тоже самое, при $n \to \infty$).

Определение масштабированной энтропии

Рассмотрим последовательность энтропий этих метрических пространств:

$$\Phi_\rho(\epsilon, z) = H(\epsilon, \mu, \Omega_T(\rho.z))$$

Масштабированная энтропия автоморфизма T, определяется как асимптотический класс функций от ϵ, z при стремлении $z \to 1$ (или, что тоже самое, при $n \to \infty$).
Две функции Φ и Ψ лежат в одном асимптотическом классе, $\Phi \asymp \Phi$, если

Определение масштабированной энтропии

Рассмотрим последовательность энтропий этих метрических пространств:

$$\Phi_\rho(\epsilon, z) = H(\epsilon, \mu, \Omega_T(\rho.z))$$

Масштабированная энтропия автоморфизма T, определяется как асимптотический класс функций от ϵ, z при стремлении $z \to 1$ (или, что тоже самое, при $n \to \infty$).
Две функции Φ и Ψ лежат в одном асимптотическом классе, $\Phi \asymp \Phi$, если

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \Phi(\epsilon, z) > \Psi(\delta, z) z \to 1;$$

и

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \Psi(\epsilon, z) > \Phi(\delta, z) \to 1;$$

Определение масштабированной энтропии

Рассмотрим последовательность энтропий этих метрических пространств:

$$\Phi_\rho(\epsilon, z) = H(\epsilon, \mu, \Omega_T(\rho.z))$$

Масштабированная энтропия автоморфизма T, определяется как асимптотический класс функций от ϵ, z при стремлении $z \to 1$ (или, что тоже самое, при $n \to \infty$).
Две функции Φ и Ψ лежат в одном асимптотическом классе, $\Phi \asymp \Phi$, если

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \Phi(\epsilon, z) > \Psi(\delta, z) z \to 1;$$

и

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \Psi(\epsilon, z) > \Phi(\delta, z) \to 1;$$

Если зависимости от ϵ (асимптотически) нет, то это условие состоит в том, что $\Phi(z) \sim \Psi(z), z \to 1$, т.е. имеют одинаковый порядок.

Продолжение

Метрика называется порождающей, если совокупность её сдвигов разделяет точки.

Продолжение

Метрика называется порождающей, если совокупность её сдвигов разделяет точки.

Theorem

(Теорема-определение).

Для любых двух порождающих метрик данного автоморфизма классы эквивалентности энтропии совпадают и наывется масштабированной энтропией.

Продолжение

Метрика называется порождающей, если совокупность её сдвигов разделяет точки.

Theorem

(Теорема-определение).

Для любых двух порождающих метрик данного автоморфизма классы эквивалентности энтропии совпадают и наывется масштабированной энтропией.

В частности, если $\Phi(z) \sim (1-z)^{-1}$ при $z \to 1$, то масштабированная энтропия совпадает с точностью до нормировки с колмогоровской энтропией.

Продолжение

Метрика называется порождающей, если совокупность её сдвигов разделяет точки.

Theorem

(Теорема-определение).

Для любых двух порождающих метрик данного автоморфизма классы эквивалентности энтропии совпадают и наывется масштабированной энтропией.

В частности, если $\Phi(z) \sim (1-z)^{-1}$ при $z \to 1$, то масштабированная энтропия совпадает с точностью до нормировки с колмогоровской энтропией.

Любой прожуточный класс эквивалентности порядков роста между линейным ($(1-z)^{-1}$) и ограниченностью реализуется для некоторого автоморфизма. Ограниченность роста есть необходимое и домтаточное условия дискретности спектра автоморфизма.

Такое же определение масштабированной энтропии может быть дано для любой счетной группы автоморфиэмов. ОБЗОР В "УСПЕХАХ: А.Вершик, П.Затицкий, Г.Вепрев.

Каталитические инварианты динамических систем

Каталитические инварианты динамических систем

Метрика на фазовом пространстве динамической системы как катализатор инвариантов.

Каталитические инварианты динамических систем

Метрика на фазовом пространстве динамической системы как катализатор инвариантов.
Катализатор — химическое вещество, ускоряющее реакцию, но не расходующееся в процессе реакции

Каталитические инварианты динамических систем

Метрика на фазовом пространстве динамической системы как катализатор инвариантов.
Катализатор — химическое вещество, ускоряющее реакцию, но не расходующееся в процессе реакции
В определении масштабированной энтропии ачначала появляется некоторая метрик на фазовом пространстве динамической системы и её характеристика — эпсилон-энтропия метрической тройки, но в конце концов предельная характеристика уже не зависит от выбора начальной метрики (при минимальных требованиях к последней). И мы получаем инвариант динамики. С другой стороны, определение этой величины без участия метрики довольно сложно и даже неестественно, хотя и возможно. Т.е. метрика — катализатор!

Каталитические инварианты динамических систем

Метрика на фазовом пространстве динамической системы как катализатор инвариантов.

Катализатор — химическое вещество, ускоряющее реакцию, но не расходующееся в процессе реакции

В определении масштабированной энтропии ачначала появляется некоторая метрик на фазовом пространстве динамической системы и её характеристика — эпсилон-энтропия метрической тройки, но в конце концов предельная характеристика уже не зависит от выбора начальной метрики (при минимальных требованиях к последней). И мы получаем инвариант динамики. С другой стороны, определение этой величины без участия метрики довольно сложно и даже неестественно, хотя и возможно. Т.е. метрика — катализатор! Переменная метрика уточняет известную концепцию образущих в эргодической теории.

Проекты

Проекты

Какие есть другие каталитические инварианты, кроме масштабированной энтропии т.е. такие, которые в конце концов не зависят от метрики, или даже зависят, но в относительно широких предположениях на метрику? В последнем случае их можно было бы назвать частичными инвариантами.

Проекты

Какие есть другие каталитические инварианты, кроме масштабированной энтропии т.е. такие, которые в конце концов не зависят от метрики, или даже зависят, но в относительно широких предположениях на метрику? В последнем случае их можно было бы назвать частичными инвариантами.
К сожалению никаких других вычислимых инвариантов метрики, кроме энтропии пока неизвестно. Энтропия метрической тройки дает лишь мощностную характеристику аппроксимации метричекого пространства конечными, но несомненно, должны существовать характеристики (включая численные), которые измеряют иную сложность аппроксимации. Для построения каталитических инвариантов можно использовать не только метрику, но и другие дополнительные структуры на фазовом пространстве, в том случае, если эти структуры имеют вычислимые инварианты, вроде энтропии метрических пространств с мерой. Но автор пока не знает таких примеров.

Матричные распределения

Матричные распределения

Матричное распределение есть мера на бесконечных матрицах, инвариантная относительно группы подстановок строк и столбцов. Запас всех таких мер описан Олдосом и довольно сложен.

Матричные распределения

Матричное распределение есть мера на бесконечных матрицах, инвариантная относительно группы подстановок строк и столбцов. Запас всех таких мер описан Олдосом и довольно сложен.
Требуется описать матричные распределения как меры в пространстве матриц. Следующее условие наряду с инварантнотою и эргодичностью относительном группы одновременных подстановок строк и столбцов выделяет такие меры.

Матричные распределения

Матричное распределение есть мера на бесконечных матрицах, инвариантная относительно группы подстановок строк и столбцов. Запас всех таких мер описан Олдосом и довольно сложен.
Требуется описать матричные распределения как меры в пространстве матриц. Следующее условие наряду с инварантнотою и эргодичностью относительном группы одновременных подстановок строк и столбцов выделяет такие меры.

Предельные спектры матричных распределений

Предельные спектры матричных распределений

Рассмотрим пространство бесконечных симметрических (или эрмитовых) матриц и вероятнотсную меру на таких матрицах.

Предельные спектры матричных распределений

Рассмотрим пространство бесконечных симметрических (или эрмитовых) матриц и вероятнотсную меру на таких матрицах. Пусть $\lambda_1^n \le \lambda_2^n \le \cdots \le \lambda_n^n$
— упорядоченный набор (случайных, вещественных) собственных чисел минора матрицы порядка n, а Λ_n их распределение.

Предельные спектры матричных распределений

Рассмотрим пространство бесконечных симметрических (или эрмитовых) матриц и вероятнотсную меру на таких матрицах.
Пусть $\lambda_1^n \leq \lambda_2^n \leq \cdots \leq \lambda_n^n$
— упорядоченный набор (случайных, вещественных) собственных чисел минора матрицы порядка n, а Λ_n их распределение.
Слабый предел последовательности мер Λ_n в пространстве мер на вещественной прямой (если он существует) называется предельным спектром исходной случайной матрицы.
Иногда, этот предел есть дельта-мера, на некотором распределении, тогда предельный спектр назвается детерминированным. Так обстоит дело, если метрика (или даже прозвольная симметричная функция двух перемнных (ядро) квадратично интегрируема (Колчинский). Но если ядро лишт=ь интегрируемо, то предельной мерой не может быть дельта-мера (Веришк-Петров-ФА. 2023), Многие вопросы остаются открытыми.