Гаянэ Панина

ПРО ЛЁЛЮ И МИНЬКУ,

А ТАКЖЕ ПРО ЛЕММУ ШПЕРНЕРА И ДВА ЕЁ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА – ОДНО СКАЗОЧНОЕ, А ДРУГОЕ РЕЗИНОВОЕ

Окончание. Начало в «Квантике» № 1 за 2023 г.

Часть 2. Лемма Шпернера для треугольника

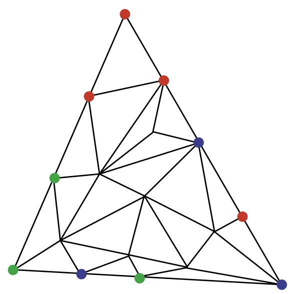
На другой день Лёля говорит:

– Минька, мы прошли на кружке новую игру. Интересную! Давай играть.

Вот мы опять садимся за стол, и Лёля рисует на листке большой треугольник, разделённый на много маленьких.[1] **Вершины треугольника покрашены – одна в красный, другая – в синий, третья – в зелёный цвет**. А вершины маленьких треугольников, лежащие на рёбрах большого, покрашены по специальному правилу: **на ребре с красным и синим концами нет зелёных вершин, на ребре с красным и зелёным концами нет синих вершин, на ребре с синим и зелёным концами нет красных вершин.**

Лёля говорит:

– Возьмём синий, красный и зелёный карандаши и будем по очереди красить оставшиеся вершины маленьких треугольников, в какой цвет захотим. Когда всё покрасим, посмотрим, есть ли среди маленьких треугольников хоть один со всеми вершинами разного цвета. Если нет, ты выиграл. А если да, то я. Можешь ходить первым!



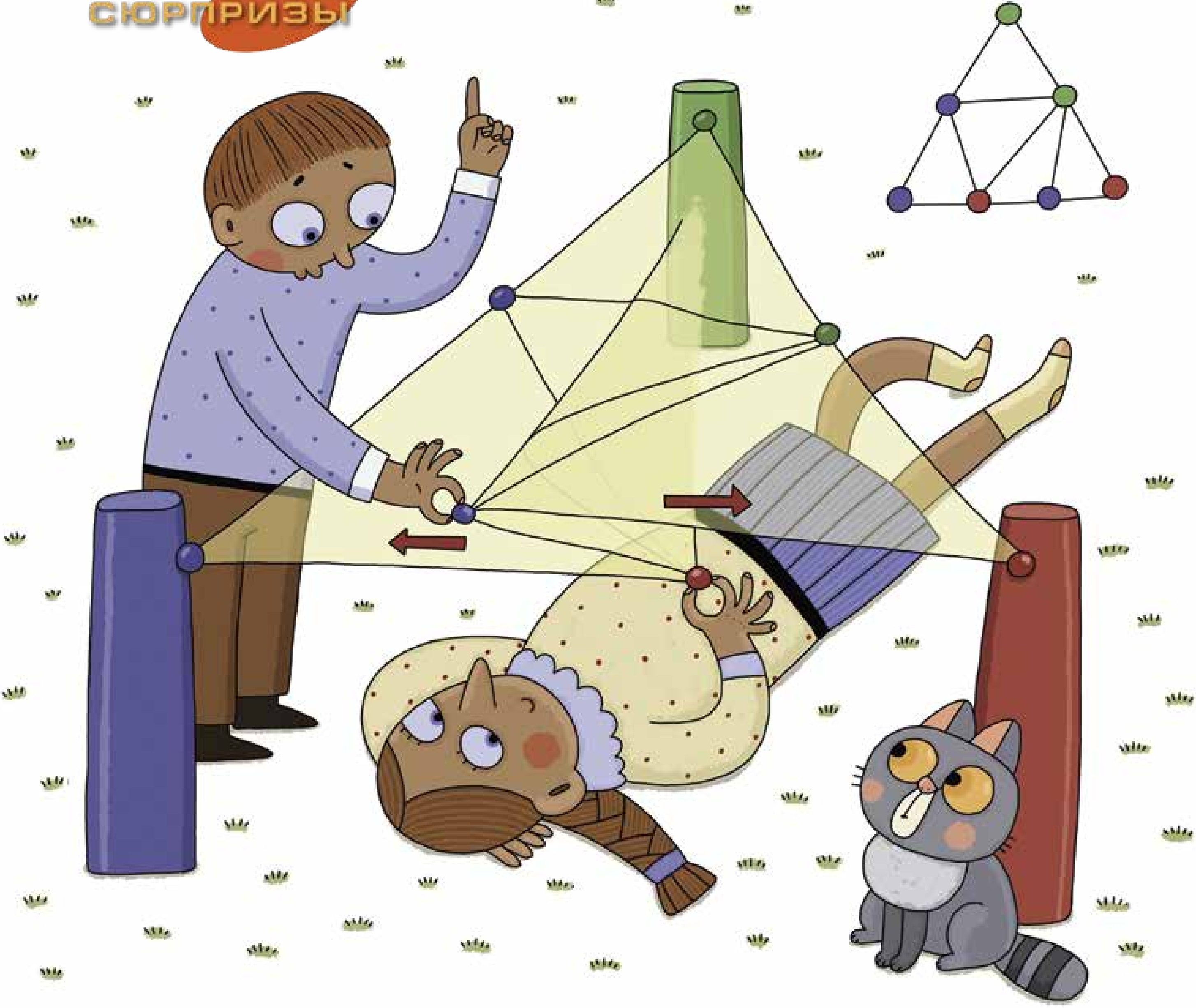
И вот Лёля берёт карандаш и моментально красит одну из точек. И я тоже крашу одну из точек. Игра быстро заканчивается, и я опять проигрываю.

Но я не плачу на сей раз, а догадываюсь: если есть лемма Шпернера для отрезка, то должна быть лемма Шпернера для треугольника! И наверное, я смогу её доказать, я же знаю секретное рассуждение про резинку! Я некоторое время думаю, а затем говорю:

– Лёлища, опять нечестная игра! Треугольник с разноцветными вершинами будет всегда! Это лемма Шпернера!

---

[1]Необходимо, чтобы каждые два маленьких треугольничка либо имели общую вершину, либо общее ребро, либо вообще не пересекались. Такие разбиения называют *триангуляциями*.



Лемма Шпернера для треугольника говорит: как ни разрезай большой треугольник на маленькие и как ни раскрашивай вершины маленьких треугольничков в красный, синий и зелёный цвет (соблюдая правила на рёбрах и вершинах треугольника), число маленьких треугольников с вершинами разных цветов окажется нечётным.

– Я могу это доказать, вот слушай. Возьмём лопнувший воздушный шарик, перерисуем на него нашу картинку с раскрашенными точками и вырежем аккуратно большой треугольник. Представим, что эта треугольная резинка легко-легко растягивается. А если её отпустить, моментально стягивается до маленького размера.

Теперь вобьём в землю три столбика, красный, синий и зелёный, и будем строить крышу! Закрепим красную вершину нашей резинки на красный столбик, синюю вершину – на синий, зелёную – на зелёный. Вышла отличная крыша. Лёля, теперь садись на землю в середину между колышков и смотри вверх! Сколько слоёв в крыше?

Лёля отвечает:

– Один слой, Минька!

Я говорю:

– А теперь по очереди, не торопясь, закрепим все красные точки на красный столбик, синие – на синий, а зелёные – на зелёный. Начнём с угла и закрепим сначала вершины первого маленького треугольника, потом соседнего с ним… и так далее. Смотри, если у маленького треугольника все концы одинакового цвета, он стянется в точку (ну или почти в точку). Если у треугольника два конца синие, а один красный, он стянется в отрезок. А треугольники со всеми разноцветными вершинами – наоборот, растянутся и образуют крышу над треугольником между столбиками. Итак, начали! Что происходит у тебя над головой?

Лёлища говорит:

– У меня над головой, как облака, проплывают складки резинки! Каждый раз, когда проходит складка, число слоёв меняется на два!

Я на всякий случай спрашиваю:

– Лёля, а край треугольной резинки, то есть какое-нибудь ребро нашего треугольника, случайно у тебя над головой не проплывает? В этом случае число слоёв может измениться на 1.

Лёля говорит:

– Нет, конечно! Например, ребро треугольной резинки с красным и синим концами содержит (по условию) только красные и синие точки, а значит, движется только над отрезком, соединяющим красный и синий колышки.

Я говорю:

– Вот мы закрепили все цветные точки на столбиках. Сколько слоёв резиновой крыши у тебя над головой теперь?

Лёля моментально отвечает:

– Столько, сколько треугольников со всеми разноцветными вершинами!

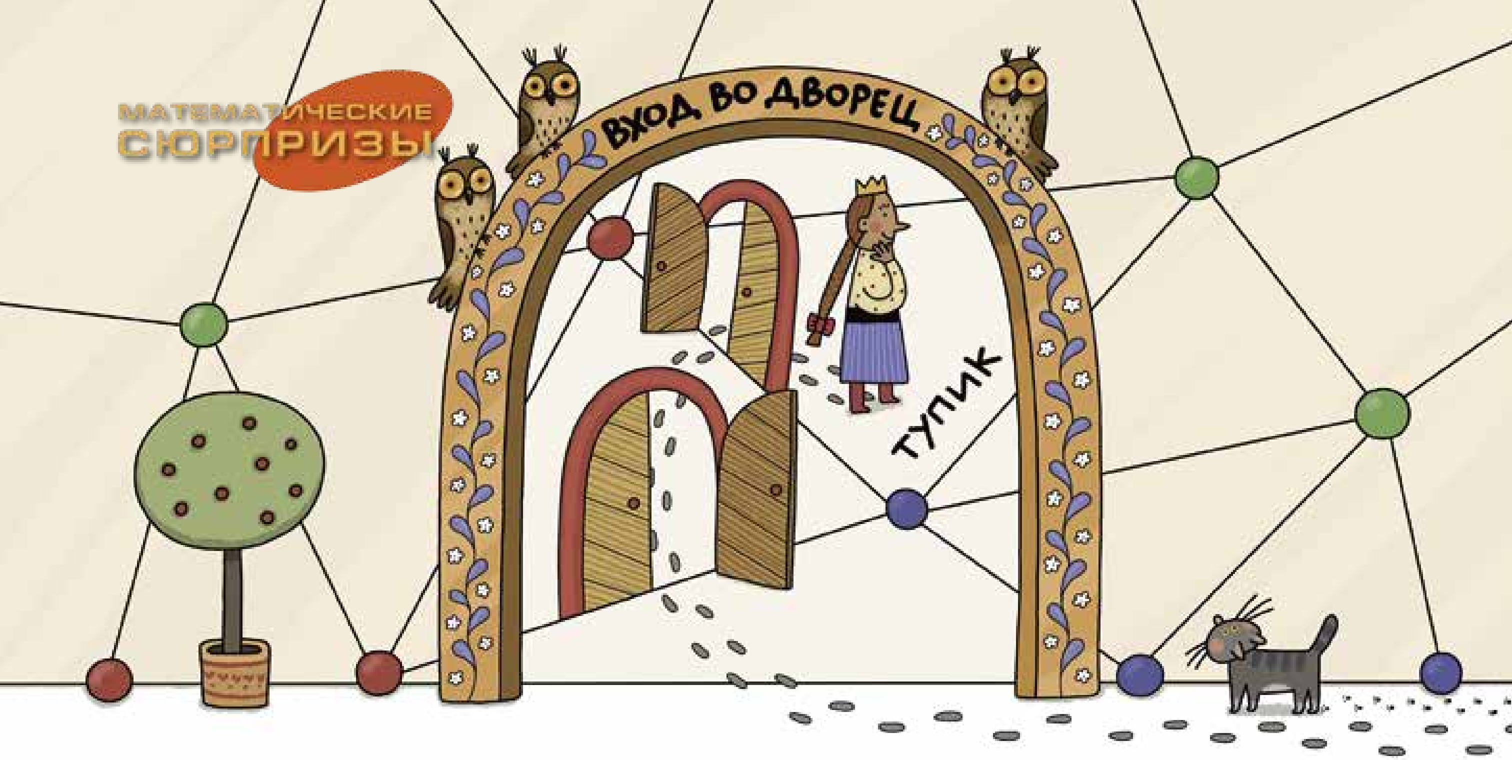
Я говорю:

– Правильно! Но ещё мы знаем, что число слоёв каждый раз менялось на два. А поскольку вначале был только один слой, то число слоёв нечётно. Значит, число треугольников со всеми разноцветными вершинами нечётно!

– Ух ты, – говорит Лёля, – я и не знала такого секретного рассуждения! Нам на кружке рассказывали доказательство про треугольный дворец с треугольными комнатами. Тоже интересно, но там нет никаких резиновых крыш. Вот послушай. Давай играть, что наш треугольник – это дворец. Маленькие треугольнички – это комнаты, а их рёбра – стены. Теперь давай представим, что рёбра, у которых один конец красный, а другой синий, – это двери. Как ты думаешь, сколько дверей может быть в одной комнате?

Я недолго думаю и отвечаю:

– Ну это легко! Есть комнаты без дверей вообще (например, треугольник со всеми синими вершинами), есть комнаты с двумя дверями, а есть с одной. Но, Лёля! Если в комнате одна дверь, то в этом треугольнике все вершины разных цветов! Значит, надо доказать, что есть комнаты с одной дверью!



Задача 2. Убедитесь, что Минька говорит правду – если в комнате одна дверь, то в этом треугольнике все вершины разных цветов.

Тут Лёля говорит:

– А теперь важный вопрос, Минька, сколько у дворца наружных дверей?

Я отвечаю:

– По-разному может быть, Лёля, смотря какой дворец… впрочем, стоп! Я могу только сказать, что число дверей нечётное. Потому что оно всегда нечётное, я отлично помню, как ты хотела меня вчера перехитрить! Ты знала про нечётность, а я – нет.

Лёля говорит:

– Вот именно, Минька. А теперь вообрази, что ты входишь во дворец через одну из дверей. Заходишь в комнату, и если в этой комнате есть вторая дверь, идёшь в соседнюю комнату, и если в соседней комнате есть вторая дверь, идёшь дальше, и дальше. Как ты думаешь, какой у тебя будет маршрут?

Я говорю:

– Ясно! Либо я выйду из дворца через какую-то другую дверь, либо попаду в тупик. А тупик – это комната с одной дверью, все вершины такой комнаты разноцветные, она нам и нужна. Значит, нужно доказать, что есть тупик.

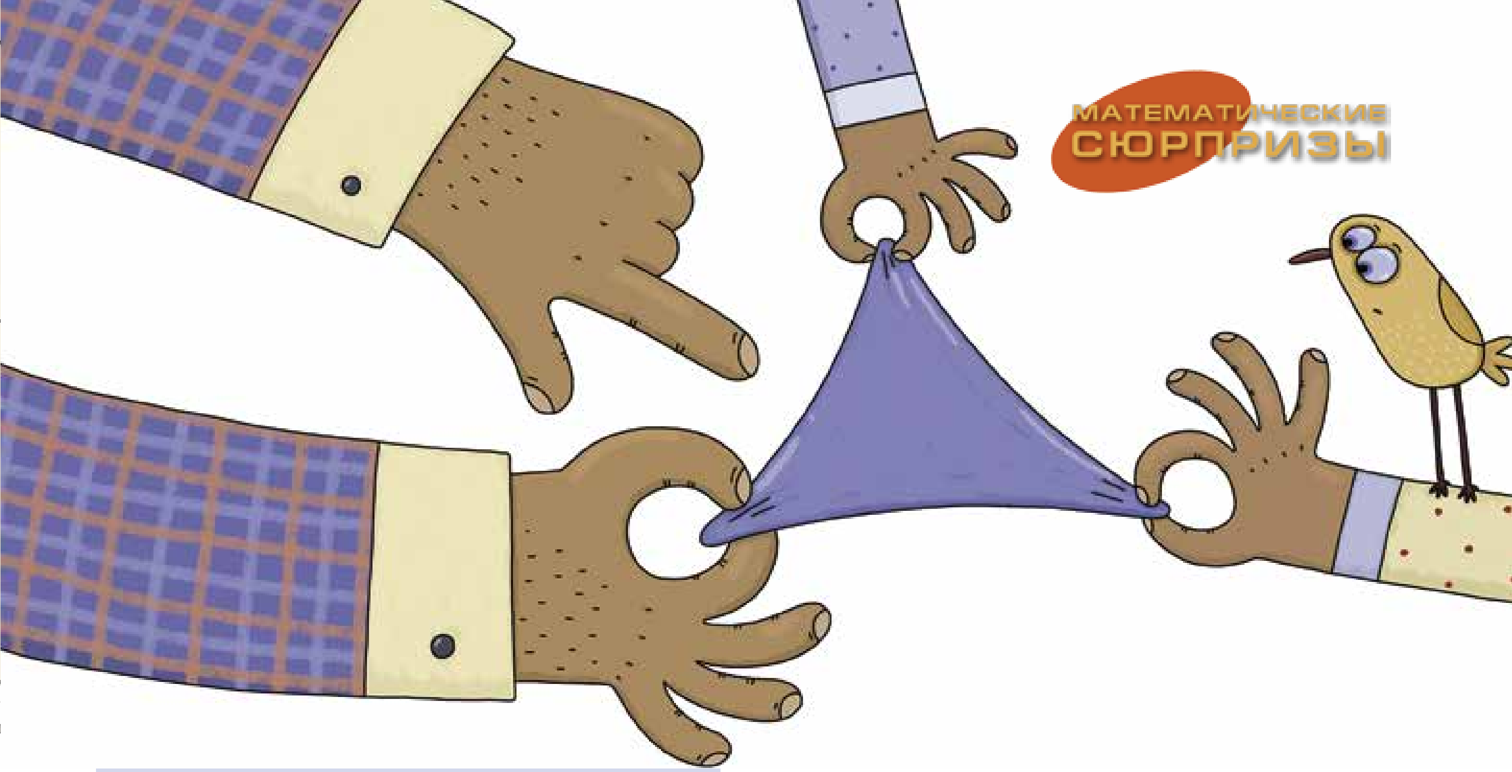
Лёля говорит:

– Вот именно, Минька. А теперь вообрази, что ты находишься в комнате с дверью. Пройди через неё в соседнюю, и если в соседней комнате есть дверь, иди дальше, и опять дальше. Как ты думаешь, какой у тебя будет маршрут?

Я говорю:

– Одно из двух, Лёля! Я рано или поздно либо выйду из дворца, либо вернусь в комнату, откуда начал, и так и буду ходить по кругу. А если я выйду из дворца, то пойду в обратном направлении, сначала дойду до той комнаты, с которой начал, а потом выйду из дворца через какую-то другую дверь.

Задача 3. На рисунке на следующей странице показан маршрут, ведущий в тупик и маршрут, соединяющий две

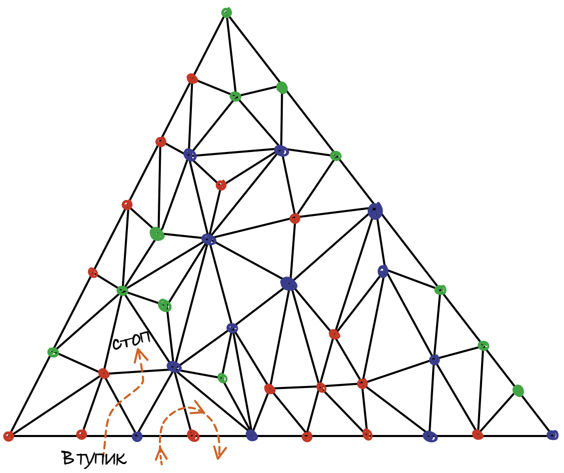


наружные двери дворца. Найдите ещё такие маршруты.

Лёля говорит:

– Но число наружных дверей нечётно, их не разбить на пары, вспомни вчерашнюю игру! Значит, зайдя в какую-то внешнюю дверь, рано или поздно мы упрёмся в тупик. Всё доказано!

Задача 4. Докажите, используя двери и комнаты, что число треугольников с вершинами всех трёх цветов нечётно. *Подсказка:* из комнаты в комнату во дворце бывают маршруты таких типов:



– из наружной двери в наружную;
– из наружной двери в тупик;
– круговой маршрут;
– из тупика в тупик.

Вечером приходит с работы папа, и мы с Лёлей рассказываем ему про лемму Шпернера для треугольника.

Папа говорит:

– Ты здорово придумал, Минька, но резиновый треугольник, если его растянуть, искривляется.

И папа немедленно находит старую хозяйственную перчатку, вырезает из неё треугольник, и мы втроём тянем треугольник в разные стороны, и видим, что его стороны искривляются.

– Но ты не горюй, Минька, твою конструкцию легко поправить: надо по краю большого треугольника и по рёбрам маленьких проложить жгуты из жёсткой резины, тогда выйдет такая конструкция, которая тебе нужна.

Вот так я, дети, узнал в семь лет, что в математике бывают дворцы, рыцари и резиновые доказательства.

Художник Елена Цветаева